Matematika 2 – java e shtatë.

Seminaret.

1. Vërtetoni që për çdo numër natyror n janë të vërteta barazimet:

   a) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,
   b) $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$,
   c) $1+4+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$,
   d) $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

2. Vërtetoni që për çdo numër natyror n janë të vërteta barazimet:

   a) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
   b) $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$,
   c) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,
   d) $1\cdot 4+2\cdot 7+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

3. Vërtetoni që për çdo numër natyror n janë të vërteta barazimet:

   a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$,
   b) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$,
   c) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$.

4. Vërtetoni që numri 2^{2^n} përfundon me shifrën 6 për çdo numër natyror $n\geq 2$.

5. Vërtetoni që për çdo numër natyror $n\geq 4$ janë të vërteta mosbarazimet:

   a) $2^n\geq 1+n$,
   b) $3^n\geq 1+2n$,
   c) $5^n\geq 1+4n$,
   d) $4^n\geq n^4$.

6. Vërtetoni që për çdo numër natyror $n\geq 2$ vlen mosbarazimi: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

7. Le të jetë $a_0=2, a_1=3$ dhe për çdo $n\in\mathbb{N}$ vlen $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$. Vërtetoni që për çdo $n\in\mathbb{N}_0$ vlen $a_n=2^n+1$.

8. Me çfarë është e barabartë shuma $2+22+\cdots+\underbrace{22\cdots2}_{n}$?

Zgjidhjet: Të gjitha ushtrimet e parashikuara për këtë njësi mësimore do ti zgjidhim me metodën e induksionit matematik. Pra, principi i induksionit matematik është: $E\subset\mathbb{N}$; $1\in E$ dhe $n\in E\Rightarrow n+1\in E$ atëherë $E=\mathbb{N}$. Në raste të veçanta do të përdorim edhe metoda jostandarte të induksionit matematik në varësi të situatave konkrete.

1.

a) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\}$. $1 \in E$ do të thotë $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit $n+1$}: $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$. Vërtetuam që $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

b) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2\}$. $1 \in E$ do të thotë $1 = 1^2$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit $2(n+1) - 1$}: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1) - 1) = n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Vërtetuam që $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

c) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 4 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}\}$. $1 \in E$ do të thotë $1 = \frac{1(3\cdot1-1)}{2}$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $1 + 4 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit $3(n+1) - 2$}: $1 + 4 + \cdots + (3n-2) + (3(n+1) - 2) = \frac{n(3n-1)}{2} + 3(n+1) - 2 = \frac{n(3n-1)}{2} + 3n + 1 = \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2}$. Vërtetuam që $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

d) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1\}$. $1 \in E$ do të thotë $1 = 2^1 - 1$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit 2^n}: $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$. Vërtetuam që $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

2.

a) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\}$. $1 \in E$ do të thotë $1^2 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit $(n+1)^2$}: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6}\right) = (n+1)\left(\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right) = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)(2(n+1)+1)}{6}$. Vërtetuam që $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

b) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\}$. $1 \in E$ do të thotë $1^2 = \frac{1\cdot(2\cdot1-1)(2\cdot1+1)}{3}$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $1^2 + 3^2 + \cdots +$

$(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit $(2n+1)^2$}: $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 = (2n+1)\left(\frac{n(2n-1)}{3} + 2n + 1\right) = (2n+1)\left(\frac{2n^2-n+6n+3}{3}\right) = (2n+1)\left(\frac{2n^2+5n+3}{3}\right) = (2n+1)\left(\frac{(n+1)(2n+3)}{3}\right) = \frac{(n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}{3}$. Vërtetuam që $n+1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

c) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\}$. $1 \in E$ do të thotë $1^3 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit $(n+1)^3$}: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = (n+1)^2\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$. Vërtetuam që $n+1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

d) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1\cdot 4 + 2\cdot 7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2\}$. $1 \in E$ do të thotë $1\cdot 4 = 1\cdot(1+1)^2$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit $(n+1)(3(n+1)+1)$}: $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + \cdots + n(3n+1) + (n+1)(3(n+1)+1) = n(n+1)^2 + (n+1)(3(n+1)+1) = (n+1)(n(n+1) + 3n + 4) = (n+1)(n^2+4n+4) = (n+1)(n+2)^2 = (n+1)\big((n+1)+1\big)^2$. Vërtetuam që $n+1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

3.

a) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}\}$. $1 \in E$ do të thotë $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$}: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1}\left(n + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$. Vërtetuam që $n+1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

b) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}\}$. $1 \in E$ do të thotë $\frac{1}{1\cdot 5} = \frac{1}{4\cdot 1+1}$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit $\frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)}$}: $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} +$

$\frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)} = \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)} = \frac{1}{4n+1} \cdot \left(n + \frac{1}{4n+5}\right) = \frac{4n^2+5n+1}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{(n+1)(4n+1)}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{n+1}{4n+5} = \frac{n+1}{4(n+1)+1}$. Vërtetuam që $n+1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

c) Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}\}$. $1 \in E$ do të thotë $\frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 1+3}{4 \cdot 3^1}$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$. Nga këtu rrjedh {duke shtuar tek dy anët e barazimit $\frac{n+1}{3^{n+1}}$}: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{3^{n+1}-2n+3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{3^{n+2}-6n-9+4n+4}{4 \cdot 3^{n+1}} = \frac{3^{n+2}-2n-2-3}{4 \cdot 3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{4 \cdot 3^{n+1}}$. Vërtetuam që $n+1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N}$.

4. Në këtë rast do të përdorim principin e induksionit matematik në bashkësinë $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2^n} = 10p_n + 6,\ p_n \in \mathbb{N}\ \{\text{pra } 2^{2^n} \text{ përfundon me shifrën } 6\}\}$. $2 \in E$ do të thotë $2^{2^2} = 16$ përfundon me 6, që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $2^{2^n} = 10p_n + 6$, për ndonjë $p_n \in \mathbb{N}$. Nga këtu rrjedh që $2^{2^{n+1}} = 2^{2 \cdot 2^n} = \left(2^{2^n}\right)^2 = (10p_n + 6)^2 = 100p_n^2 + 120p_n + 36 = 10(10p_n^2 + 12p_n + 3) + 6 = 10p_{n+1} + 6, \text{ku } p_{n+1} = 10p_n^2 + 12p_n + 3 \in \mathbb{N}$. Vërtetuam që $n+1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

5. Në këtë rast do të përdorim principin e induksionit matematik në bashkësinë $\mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}$. Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{janë të sakta relacionet e pikave } a), b), c)\ dhe\ d)\}$. Lehtë provohet se $4 \in E$ për secilin rast. Supozojmë tani që $n \in E$. Kemi:

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(1+n) = 1 + (n+1) + n > 1 + (n+1) \Rightarrow n+1 \in E.$

$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq 3(1+2n) = 1 + 2(n+1) + 2 + 4n > 1 + 2(n+1) \Rightarrow n+1 \in E$

$5^{n+1} = 5 \cdot 5^n \geq 5(1+4n) = 1 + 4(n+1) + 1 + 16n > 1 + 4(n+1) \Rightarrow n+1 \in E$

$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \geq 4n^4 = n^4 + 3n^4 \geq n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4 \Rightarrow n+1 \in E$. Këtu kemi shfrytëzuar mosbarazimin $3n^4 \geq 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ i cili vlen për çdo numër natyror $n \geq 4$. Ky mosbarazim është i sakte për $n \geq 4$ sepse vlejnë mosbarazimet evidente $n^4 \geq 4n^3$, $n^4 \geq 6n^2$ dhe $n^4 \geq 4n + 1$. Duke i mbledhur anë për anë këto mosbarazime arrijmë tek mosbarazimi $3n^4 \geq 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ për $n \geq 4$.

Për secilin rast vërtetuam që n+1 $\in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}$.

6. Edhe në këtë rast do të përdorim principin e induksionit matematik në bashkësinë $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}\}$. $2 \in E$ do të thotë $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} > \frac{13}{24}$, që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$. Nga këtu rrjedh që $\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)} = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{13}{24} +$

$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > \frac{13}{24}$.
Vërtetuam që $n+1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi që $E = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

7. Në këtë rast do të përdorim një formë jostandarte të principit të induksionit matematik. $E \subset \mathbb{N}_0$, $0{,}1 \in E$ dhe $n-1, n \in E$ *për* $n \in \mathbb{N}$ implikojnë që $n+1 \in E$, atëherë $E = N_0$. Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n = 2^n + 1\}$.

$0{,}1 \in E$ do të thotë që $a_0 = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$, $a_1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$ që është e saktë.

Supozojmë që $n-1, n \in E$ për $n \in \mathbb{N}$. Pra, $a_{n-1} = 2^{n-1} + 1$ dhe $a_n = 2^n + 1$. Nga këtu kemi që:

$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} = 3 \cdot (2^n + 1) - 2 \cdot (2^{n-1} + 1) = 3 \cdot 2^n - 2^n + 1 = 2 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1.$

Vërtetuam që $n+1 \in E$. Nga principi i induksionit matematik kemi $E = N_0$.

8. Do të shfrytëzojmë barazimet $\underbrace{22\cdots2}_{n} = 2 \cdot \underbrace{11\cdots1}_{n} = 2 \cdot \frac{\overbrace{99\cdots9}^{n}}{9} = 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9}$. Tani kemi:

$$2 + 22 + \cdots + \underbrace{22\cdots2}_{n} = 2 \cdot \left(\frac{10^1-1}{9} + \cdots + \frac{10^n-1}{9}\right) = \frac{2}{9} \cdot (10^1 + \cdots + 10^n - n) = \frac{2}{9} \cdot \left(1 + 10^1 + \cdots + 10^n - (n+1)\right) = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{10^{n+1}-1}{9} - (n+1)\right) = \frac{2}{81} \cdot \left(10^{n+1} - 9n - 10\right).$$

Kemi shfrytëzuar barazimin $1 + 10^1 + \cdots + 10^n = \frac{10^{n+1}-1}{9}$ i cili vlen për çdo $n \in \mathbb{N}$. Ky barazim vërtetohet me metodën e induksionit matematik.

Shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 10^1 + \cdots + 10^n = \frac{10^{n+1}-1}{9}\}$. $1 \in E$ do të thotë $1 + 10^1 = \frac{10^{1+1}-1}{9}$ që është e saktë. Supozojmë tani që $n \in E$. Pra kemi supozuar $1 + 10^1 + \cdots + 10^n = \frac{10^{n+1}-1}{9}$. Nga këtu kemi $1 + 10^1 + \cdots + 10^n + 10^{n+1} = \frac{10^{n+1}-1}{9} + 10^{n+1} = \frac{10 \cdot 10^{n+1} - 1}{9} = \frac{10^{(n+1)+1}-1}{9}$. Vërtetuam që $n+1 \in E$. Nga principi i induksionit matematik kemi $E = \mathbb{N}$.